Problème 2 :(BAC)

A - Soit f la fonction numérique à variable réelle définie sur **R** par

$f(x) = \dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$ et soit ( ) sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$.

1°/ a) Etudier les variations de f.

b) Montrer que la courbe ( ) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées. Tracer la courbe ( ).

2°/ a) Montrer que f est une bijection de **R** sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Soit g la fonction réciproque de f et soit (') sa courbe représentative dans le repère $(0,\vec{i},\vec{j})$.

Montrer que $g(x) = \dfrac{1}{2} Log(\dfrac{x^2}{1-x^2})$ pour tout x élément de J et tracer ( ).

B - 1°/ Soit φ la fonction numérique définie sur **R** par $\varphi(x) = f(x) - x$. Etudier les variations de φ et montrer qu'il existe un réel unique α tel que $\varphi(\alpha) = 0$ et $Log2 < \alpha < 1$

2°/ On pose $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha} Log\frac{x^2}{1-x^2}dx$

a) En utilisant une intégration par parties, calculer I.

on remarquera que $\dfrac{2}{1-x^2} = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}$

b) En déduire en fonction de α l'aire de la partie (K) du plan limitée par les courbes ( ) et ( ) et les deux axes.

3°/ On définie la suite (U_n) par

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$ pour tout entier naturel n

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \le U_n < \alpha$

b) Etudier le sens de variation de la suite (U_n). En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

c) On définie la suite (V_n) par $V_n = \dfrac{1}{\alpha - U_n}\displaystyle\int_{U_n}^{\alpha} f(x)dx$ pour tout entier naturel n. Montrer que $U_{n+1} \le V_n \le \alpha$ pour tout entier naturel n.